ref: 131 dev pour l'oral.

Leçons 223
228
265

Développement: Méthode archimédienne pour approcher π

Théorème :

Soit $n \geq 2$. On note U_n l'aire d'un polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans le cercle de centre O de coordonnées $(0,0)$ et de rayon 1 dans le repère euclidien usuel. Alors $(U_n)_{n\geq 2}$ converge linéairement vers π, nous donnant une méthod d'approximation de π.

⚠ rappel: (U_n) converge linéairement vers $\ell \in \mathbb{R}$ si $\exists\, M \in [0,1[$ tq $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{U_{n+1}-\ell}{U_n-\ell}\right| = M$. Le terme linéairement fait référence à la puissance 1 du dénominateur, contrairement (par ex) à la convergence quadratique caractérisée par $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{U_{n+1}-\ell}{(U_n-\ell)^2}\right| = M' > 0$.

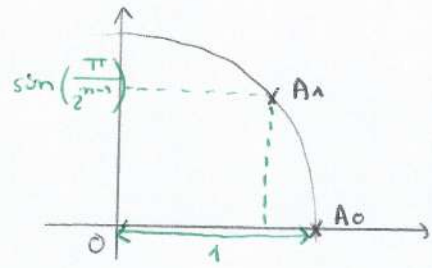
Preuve:

▶ On remarque tout d'abord que (U_n) est bien définie pour $n \geq 2$: si on définit pour tout $k \in [\![0, 2^{n-1}-1]\!]$ le point A_k comme ayant pour coordonnées polaires $(1, \frac{k\pi}{2^{n-1}})$ dans le repère euclidien usuel, alors U_n représente l'aire du polygone convexe dont les sommets sont les A_k.

De plus, si $n \geq 2$ alors U_n est égal à 2^n fois l'aire du triangle de sommets O, A_0, A_1. On a donc

$$U_n = 2^n \cdot \frac{1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)}{2} = 2^{n-1} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) \quad (*)$$

⚠ au moment de cette explication, faire le dessin



Comme $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \pi$. Plus précisement, grâce à un DL de sin en 0 à l'ordre 3, on a (pour $n\to+\infty$)

$$\pi - U_n = 2^{n-1}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)^3 + o\left(\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)^3\right)\right]$$
$$= \frac{2\pi^3}{3.4^n} + o\left(\frac{1}{4^n}\right)$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\pi - U_{n+1}|}{|\pi - U_n|} = \dfrac{1}{4}$, ce qui montre que $(U_n)_{n\geqslant 2}$ converge linéairement vers π.

▶ Malheureusement on ne peut pas utiliser directement (*) pour calculer les valeurs approximatives des U_n, car il nous faut une approximation précise du sinus et de π.

Nous allons expliciter une relation de récurrence entre les termes successifs de $(U_n)_{n\geqslant 2}$ ne faisant <u>pas</u> apparaître le nombre π. On a déjà $\boxed{U_0 = 2}$.

soit $n\geqslant 2$. On peut écrire $\sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) = 2.\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ $\binom{*}{*}$

(on a utilisé $\sin(2x) = 2.\sin(x).\cos(x)$, $x\in\mathbb{R}$)

or, $$\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)} \underset{\substack{\uparrow \\ \cos^2+\sin^2=1}}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \cos(2x) = 2\cdot\cos^2(x)-1 \ , \ \forall x\in\mathbb{R}}}{=} 2\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)-1$$

d'où $$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)}}{2}}$$

et $(*)$ donne

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) . \sqrt{2+2\cdot\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)}}$$

soit

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)}{\sqrt{2+2\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)}}}$$

càd

$$2^{-n} . U_{n+1} = \frac{2^{-(n-1)}\,U_n}{\sqrt{2+2\sqrt{1-2^{-2(n-1)}U_n^2}}}$$

et donc

$$\boxed{U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}\,.\,U_n}{\sqrt{1+\sqrt{1-2^{-2(n-1)}U_n^2}}}}$$

Cette relation de récurence ne fait pas apparaître π, et permet donc le calcul explicite de U_n pour $n \geq 2$, et donc l'approximation de π.